

TD 3

Equivalence ricardienne et démographie

References

Buiter, Willem H. (1988) “Death, birth, productivity growth and debt neutrality.” *The Economic Journal* 98(391), pp. 279–293

Points techniques du TD :

- Équivalence ricardienne,
- Lagrangien intertemporel.

On considère une version du modèle à générations en temps discret, avec incertitude sur la durée de vie. A une période donnée, la population est constituée de l'ensemble des individus encore vivants issus des cohortes passées. La démographie est caractérisée par deux paramètres supposés constants :

- un taux de natalité b : à la période t , une cohorte de taille bN_t vient au monde, N_t étant la taille de la population à la date t ,
- une probabilité de décès p , qui frappe à chaque période l'ensemble des agents vivants, et ce indépendamment de leur âge.

Par convention, les variables sont définies en début de période.

A Démographie

1. Calculer n le taux de croissance de la population.
2. Donner la probabilité pour un agent né à la période s meure avant le début de la période $t > s$.

B Dotations, système viager et évolution de la richesse financière

On note $a_{s,t}$ la richesse financière à la période t d'un agent né à la période s . Un agent commence avec une richesse financière $a_{s,s} = 0$. A chaque période, il reçoit un salaire w_t et paie un montant d'impôts τ_t . A la période t , un agent dispose d'un montant $a_{s,t} + w_t - \tau_t$ qu'il peut soit consommer, soit placer. Le placement de la période t est doublement rémunéré à la période $t + 1$:

- au taux d'intérêt réel r , constant au cours du temps,
- via une prime proportionnelle à son épargne.

On suppose en effet qu'il existe un système viager parfaitement concurrentiel (i.e. profit nul) dont le principe est le suivant : à chaque période un agent reçoit une prime proportionnelle à son épargne; en échange, il rétrocède l'intégralité de sa richesse financière au jour de sa mort.

3. Ecrire la loi d'évolution de la richesse financière d'un individu né à la période s pendant la durée de sa vie, à taux actuariel¹ Π donné.

4. Ecrire l'ensemble des dépenses et des recettes pour le système viager et déterminer le taux Π vérifiant la condition de profit nul.

5. Montrer que le taux d'intérêt (brut) total pour l'épargne des individus est $\frac{1+r}{1-p}$. Par la suite on notera $1 + r_h \equiv \frac{1+r}{1-p}$.

C Comportement de consommation optimal

Un agent appartenant à la cohorte née à la période s cherche à maximiser

$$U_s = \sum_{t=s}^{\infty} (1-p)^{t-s} \beta^{t-s} \log(c_{s,t})$$

L'évolution de la richesse est contrainte par la condition suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_{s,t}}{(1+r_h)^t} = 0$$

6. Ecrire le programme de maximisation d'un agent né à la période s et le Lagrangien associé.

7. Dériver les conditions du premier ordre et montrer que :

$$\frac{c_{s,t+1}}{c_{s,t}} = \beta(1+r)$$

8. En utilisant la condition de transversalité, écrire la contrainte budgétaire intertemporelle. On notera :

$$h_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(w_{t+i} - \tau_{t+i})}{(1+r_h)^i}$$

9. Déterminer $c_{s,t}$ pour $t \geq s$ en fonction de $a_{s,t}$ et de h_t .

10. Ecrire C_t la consommation agrégée sur l'ensemble de la population.

¹ Π est la prime proportionnelle liée à l'aspect viager

D Finances publiques

L'Etat réalise des dépenses G_t (qui n'apparaissent pas dans la fonction d'utilité des agents), qu'il peut financer soit par l'impôt (on note T_t les prélèvements fiscaux agrégés), soit par la dette, sur laquelle il paie un taux d'intérêt r .

11. Ecrire la loi d'évolution de la dette D_t .
12. L'évolution de la dette est contrainte par la condition suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D_t}{(1+r)^t} = 0$$

Montrer qu'on doit avoir :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{(1+r)^i} = D_t + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+r)^i}$$

E Equilibre et condition pour la neutralité de la dette

13. Expliquer pourquoi on doit avoir à chaque période $A_t = D_t$.
14. Substituer dans C_t l'expression de D_t en fonction des excédents budgétaires futurs.
15. Montrer que la consommation est indépendante du chemin de taxe choisi si et seulement si :

$$b = 0$$

16. Dans cette économie, l'argument selon lequel il n'y a pas équivalence ricardienne parce qu'au moment de rembourser la dette on sera peut-être mort est-il valable?